**15. Центральная предельная теорема.**

**Теорема 15.1. *Центральная предельная теорема***. Пусть – независимые одинаково распределенные случайные величины с математическим ожиданием и дисперсией тогда

здесь обозначено - называется выборочное среднее; далее это среднее арифметическое будет очень часто встречаться во многих задачах.

Слева под знаком предела стоит функция распределения случайной величины , а в правой части равенства – функция распределения стандартного нормального закона , поэтому утверждение Теоремы состоит в том, что распределение выборочного среднего стремится к

**Доказательство.** Обозначим и преобразуем ее к виду суммы случайных величин:

Относительно так определенных легко установить следующее: они имеют одинаковые распределения, поэтому характеристическая функция

Далее, характеристическую функцию – суммы независимых случайных величин – можно представить в виде

следовательно, согласно теореме Хелли (Параграф 13), – это и есть характеристическая функция стандартного нормального закона.

В качестве следствия легко получаем следующий результат для схемы Бернулли.

**Теорема 15.2. *Интегральная теорема Муавра*** **–** ***Лапласа***. Обозначим в схеме Бернулли с вероятностью успеха в одном испытании *p*,

тогда

Это прямо следует из предыдущей Теоремы, поскольку в схеме Бернулли . При использовании этой формулы для приближенных вычислений вероятность должна быть не очень близка к 0 или 1 (см. замечание к Теореме 5.1.)

**Пример 15.1.** Оценка неизвестной вероятности. Применим закон больших чисел и центральную предельную теорему к задаче оценивания неизвестной вероятности на примере иглы Бюффона (Пример 2.2.).

Согласно закону больших чисел Бернулли (Параграф 14), для оценки вероятности в виде частоты справедливо неравенство

Спрашивается: сколько раз надо бросить иглу, чтобы ошибка была не более 0,003 с вероятностью по крайней мере 0,95?

Из соотношения

можно найти оценку для ,

Оценкой этой воспользоваться нельзя, так справа находится неизвестная вероятность, которую мы как раз и оцениваем. Но стоящее в числителе выражение принимает максимальной значение на интервале , равное , в точке поэтому можно принять

Как показано в Примере 2.2., число связано с вероятностью пересечения линии в задаче Бюффона формулой ; для погрешность = 0,003 в оценке вероятности приводит к погрешности примерно в 0,01 в оценке числа . Не очень хорошая получилась оценка. Но закон больших чисел не лучший инструмент получения таких оценок, он дает очень грубое приближение; лучший результат можно получить с помощью центральной предельной теоремы. Действительно, применим интегральную теорему Муавра-Лапласа,

подберем *z*, удовлетворяющее последнему равенству,

Из соотношения

находим

Теорема об асимптотической нормальности функции от асимптотически нормальной последовательности Лагутин 88

Тж о свойствах сходимости случайных последовательностей